

## ما يجب أن أعرفه حتى أقول : إنني استوعبت هذا الدرس

- 1 – يجب أن أعرف أن مجال الجاذبية الأرضية ثابت على ارتفاع من رتبة الكيلومترات عن سطح الأرض ، وأن قوة جذب الأرض للأجسام ما هي إلا قوة ثقل هذه الأجسام .
- 2 – يجب أن أعرف أن قوة الاحتكاك لجسم مع مائع تتناسب مع سرعته مرفوعة للأس  $n$  ، أي  $f = k v^n$  ، وأننا لا ندرس إلا حالتين هما من أجل  $n = 1$  ,  $n = 2$  .
- 3 – يجب أن أعرف أن دافعة أرخميدس (Archimède) في الموائع (الغازات والسوائل) هي ثقل المائع الذي يزيحه الجسم .
- 4 – يجب أن أعرف أن السرعة الحدية لجسم يسقط في مائع هي السرعة التي يكتسبها عندما تصبح القوى المعرقلة له مساوية لقوة ثقله .
- 5 – يجب أن أعرف حل المعادلتين التفاضليتين في الحالتين :  $f = k v$  و  $f = k' v^2$  ، حيث أن في الحالة الأولى يكون الحل مماثلاً للحلول التي مرّت معنا في الكهرباء ، أما في الحالة الثانية لا نحل المعادلة إلا بطريقة أولر .
- 6 – يجب أن أعرف أن السقوط الحر هو حركة متغيرة بانتظام تسارعها  $\vec{g}$  .
- 7 – يجب أن أعرف مبدأ انحفاظ الطاقة وكيفية تطبيقه لدراسة جملة ميكانيكية .
- 8 – يجب أن أعرف أن حركة الأجسام في مجال الجاذبية الأرضية ما هي إلا تطبيقات لقوانين نيوتن .

## ملخص الدرس

## 1 – السقوط الشاقولي لجسم

في الحالة العامة يخضع الجسم إلى القوى التالية :

$$\vec{P} = \rho_f V_s g \quad \text{، دافعة أرخميدس} \quad f = k v^n$$

حيث :  $\rho_f$  : الكتلة الحجمية للمائع (Le fluide)

$V_s$  : حجم الجسم المتحرك

## 2 - المعادلتان التفاضليتان اللتان تخضع لهما السرعة

$$\text{- حالة } f = k v : \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right) \quad \text{. حل هذه المعادلة : } v = \frac{mg}{k} \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right) \left( 1 - e^{-\frac{k}{m} t} \right)$$

$$\text{- حالة } f = k' v^2 : \frac{dv}{dt} + \frac{k'}{m} v^2 = g \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right)$$

في كلتي الحالتين : إذا كانت الكتلة الحجمية للمائع ( $\rho_f$ ) صغيرة جدًا أمام الكتلة الحجمية للجسم ( $\rho_s$ ) يمكن إهمال النسبة  $\frac{\rho_f}{\rho_s}$  أمام 1

وبالتالي تكون دافعة أرخميدس مهملة . تصبح المعادلتان في هذه الحالة :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v^2 = g \quad , \quad \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g$$

### 3 - السرعة الحدية

$$v_l = \frac{mg}{k} \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right) : \text{ حالة } f = k v$$

$$v_l = \sqrt{\frac{mg}{k'} \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right)} : \text{ حالة } f = k' v^2$$

### 4 - الزمن المميز للسقوط

نتنبأ بواسطة هذا الزمن عن بداية الانتقال إلى النظام الدائم .  
 من أجل  $f = k v$  :  $\tau = \frac{m}{k}$  ، من أجل  $f = k' v^2$  :  $\tau = \sqrt{\frac{m}{k' a_0}}$  ، حيث  $a_0$  هو التسارع عند  $t = 0$

### 5 - السقوط الحر الشاقولي

$$\vec{a} = \vec{g} : \text{التسارع}$$

$$v = g t + v_0 : \text{السرعة}$$

$$z = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + z_0 : \text{الفاصلة}$$

$$h = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t : \text{العلاقة بين المسافة المقطوعة } (h) \text{ والمدة الزمنية } (t) \text{ اللازمة لقطعها}$$

$$v_B^2 - v_A^2 = 2g h : \text{العلاقة بين السرعة والمسافة المقطوعة من النقطة A إلى النقطة B}$$

### 6 - السقوط الحر في المستوي

إذا قُذِفَ جسم في المستوي الشاقولي  $(O x z)$  أو  $(O y z)$  من مبدأ الإحداثيات بسرعة ابتدائية يصنع شعاعها مع المحور الأفقي زاوية حادة  $\alpha$  . يكون لدينا :  $\vec{a} = \vec{g}$

$$v_{0,z} = v_0 \sin \alpha \quad , \quad v_x = v_0 \cos \alpha$$

$$x = v_0 \cos \alpha t \quad \text{الحركة منتظمة على المحور الأفقي}$$

$$z = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \alpha t \quad (g : \text{قيمة جبرية}) \text{ الحركة متغيرة بانتظام على المحور الشاقولي}$$

$$z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha : \text{معادلة المسار}$$

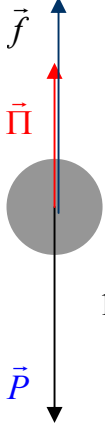
$$d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} : \text{فاصلة المدى}$$

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} : \text{ترتيب الذروة}$$

شعاع السرعة عند الذروة يكون أفقياً ، لأن السرعة على  $Oz$  تنعدم .

## 1 - السقوط الشاقولي لجسم

يخضع الجسم أثناء سقوطه في مائع (سائل أو غاز) إلى القوتين  $\vec{f}$  و  $\vec{\Pi}$  (الشكل - 1) ، وهما قوتان معاكستان لقوة ثقل الجسم .  
**دافعة أرخميدس  $\vec{\Pi}$**  : لما نغمر جسما في إناء يحتوي على الماء أو أي سائل آخر ، فإن مستوى الماء في الإناء يصعد .  
 الحجم الزائد (المُزاح من طرف الجسم) هو نفسه حجم الجسم . لو أخذنا هذا الحجم من السائل المُزاح ووزناه في ميزان نجد كتلته  $m$  ، ولو حسبنا ثقله نجد  $P = m g$  . إن هذا الثقل هو نفسه القوة التي نسميها دافعة أرخميدس .  
 نفس الشيء بالنسبة لجسم مغمور في غاز ، فإن دافعة أرخميدس هي ثقل الغاز الذي أزاحه الجسم .  
**خصائصها** : **الحامل** : هو الشاقول ، يعني نفس حامل ثقل الجسم .



الشكل - 1

**الجهة** : نحو الأعلى .

**نقطة التأثير** : مركز عطالة الجسم ، أي نفس نقطة تأثير ثقل الجسم .

**الشدة** :  $\Pi = m g$  ، ولدينا كتلة السائل المزاح هي  $m = \rho_f V$  ، وبالتالي  $\Pi = \rho_f V g$

حيث :  $\rho_f$  هي الكتلة الحجمية للسائل ، و  $V$  هو حجم الجسم .

**قوة الاحتكاك** : تتناسب مع سرعة الجسم ، كلما تزداد السرعة تزداد مقاومة السائل للجسم (أخرج يدك من نافذة السيارة عندما تكون سرعة السيارة صغيرة ، ثم عندما تكون سرعة السيارة كبيرة وقارن في كل حالة القوة التي تقاوم حركة يدك) .

• في حالة سرعة الجسم صغيرة : نقول أن الجسم ينساب في السائل ، وتكون طويلة قوة الاحتكاك من الشكل :  $f = k v$

• في حالة سرعة الجسم كبيرة نسبيا : تحدث اضطرابات وراء الجسم أثناء حركته في السائل ، وتكون طويلة قوة الاحتكاك من الشكل :  $f = k' v^2$  .  
 نسمي كلا من  $k$  و  $k'$  ثابت الاحتكاك .

## 2 - تطبيق القانون الثاني لنيوتن

وبإسقاط هذه العلاقة على المحور الشاقولي Oz (الشكل - 2) :

$$\vec{P} + \vec{f} + \vec{\Pi} = m \vec{a}$$

$$P - f - \Pi = m a$$

• حالة  $f = k v$

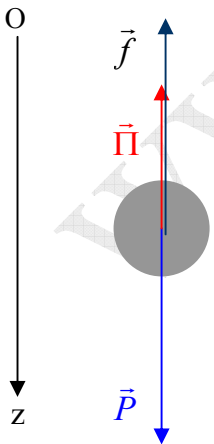
، وبتقسيم طرفي المعادلة التفاضلية على  $m$  ، نكتب :  $mg - kv - \rho_f V_S g = m \frac{dv}{dt}$

، ولدينا  $\frac{V_S}{m} = \frac{1}{\rho_s}$  ، حيث :  $\rho_s$  : الكتلة الحجمية للجسم .  
 $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g \left( 1 - \rho_f \frac{V_S}{m} \right)$

وتصبح المعادلة التفاضلية :  $(1) \quad \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right)$

حل هذه المعادلة من الشكل  $(2) \quad v = A e^{\alpha t} + B$

نعوّض في (1) :  $A \alpha e^{\alpha t} + \frac{k}{m} (A e^{\alpha t} + B) = g \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right)$



الشكل - 2

$$Ae^{\alpha t} \left( \alpha + \frac{k}{m} \right) + \frac{kB}{m} = g \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right) \quad \text{أو} \quad A\alpha e^{\alpha t} + \frac{k}{m} A e^{\alpha t} + \frac{kB}{m} = g \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right)$$

لكي تتحقق هذه المعادلة يجب أن يكون :

$$B = \frac{mg}{k} \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right) \quad \text{ومنه} \quad \frac{kB}{m} = g \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right) \quad , \quad \alpha + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{k}{m}$$

أما لتحديد عبارة A نستعمل الشروط الابتدائية ، فمثلا إذا لم تكن للجسم سرعة ابتدائية ، أي أنه عند اللحظة  $t = 0$  تكون  $v = 0$

$$0 = Ae^0 + \frac{mg}{k} \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right) \quad (2) \quad \text{ومنه} \quad A = -\frac{mg}{k} \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right)$$

$$v = \frac{mg}{k} \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right) \left( 1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) \quad \text{المعادلة التفاضلية هي إذن :}$$

### السرعة الحدية :

عندما يسقط الجسم تزايد سرعته ، حيث في نفس الوقت تزايد قوة الاحتكاك ، لأن هذه الأخيرة تتناسب مع السرعة .  
ونعلم أن أثناء السقوط لا يتغير ثقل الجسم وكذلك دافعة أرخميدس لا تتغير . وعندما يصبح مجموع قوتي الاحتكاك ودافعة  
أرخميدس مساويا لقوة الثقل يصبح المجموع الشعاعي للقوى المؤثرة على الجسم معدوما ، وبالتالي يصبح التسارع معدوما

$$\sum \vec{F} = m \vec{a} \quad , \quad m \neq 0 \quad , \quad \frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{لأن} \quad a = \frac{dv}{dt}$$

نعوض  $\frac{dv}{dt} = 0$  في المعادلة التفاضلية (1) ونجد السرعة ، والتي نسميها السرعة الحدية :

$$v_l = \frac{mg}{k} \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right)$$

• حالة  $f = k' v^2$

$$mg - kv^2 - \rho_f V_s g = m \frac{dv}{dt} \quad \text{وبتقسيم طرفي المعادلة التفاضلية على} \quad m \quad , \quad \text{نكتب :}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k'}{m} v^2 = g \left( 1 - \rho_f \frac{V_s}{m} \right) \quad , \quad \text{ولدينا} \quad \frac{V_s}{m} = \frac{1}{\rho_s} \quad , \quad \text{حيث} \quad \rho_s : \text{الكتلة الحجمية للجسم .}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k'}{m} v^2 = g \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right) \quad \text{وتصبح المعادلة التفاضلية :}$$

$$v_l = \sqrt{\frac{mg}{k'} \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right)} \quad \text{نجد عبارة السرعة الحدية} \quad , \quad \frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{بوضع}$$

هذه المعادلة التفاضلية من الشكل :  $\frac{dv}{dt} + B v^2 = A$  ، إن حل هذه المعادلة التفاضلية بالطريقة السابقة خارج برنامج الرياضيات .

لهذا نلجأ للطريقة التقريبية المسماة طريقة أولر .

**ملاحظة:** A و B في هذه المعادلة التفاضلية لا علاقة لهما بـ A و B في حل المعادلة التفاضلية السابقة ، فهي مجرد رموز فقط .

تسمح طريقة أولر بتمثيل تقريبي للسرعة بدلالة الزمن . فمن أجل حساب السرعات في كل لحظة يجب أن نمثل بين  $\frac{dv}{dt}$  و  $\frac{\Delta v}{\Delta t}$

أي معنى هذا يجب أن نأخذ فرقا صغيرا بين كل لحظة ولحظة تعقبها ، أو بعبارة أخرى يجب أن يكون  $\Delta t$  صغيرا .

لدينا :  $\frac{dv(t)}{dt} = A - B v^2(t)$  . وبالتالي نكتب  $\frac{\Delta v}{\Delta t} = A - B v^2(t)$  أو  $\frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = A - B v^2(t)$

وبالتالي :  $v(t+\Delta t) - v(t) = [A - B v^2(t)] \Delta t$

نسمي  $\Delta t$  خطوة التغير الزمني .

إذا كانت مرتبة السرعة  $v(t)$  هي  $v_n$  ، تكون مرتبة السرعة  $v(t+\Delta t)$  هي  $v_{n+1}$  ، وعلى هذا الأساس نكتب :

$$v_{n+1} = v_n + [A - B v_n^2] \Delta t$$

عندما نحسب قيم السرعة في كل لحظة نتبع ما يلي :

عند  $t_0 = 0$  لدينا  $v = v_0$

عند  $t_1 = t_0 + \Delta t$  ، أي من أجل  $n = 0$  لدينا  $v_1 = v_0 + [A - B v_0^2] \Delta t$

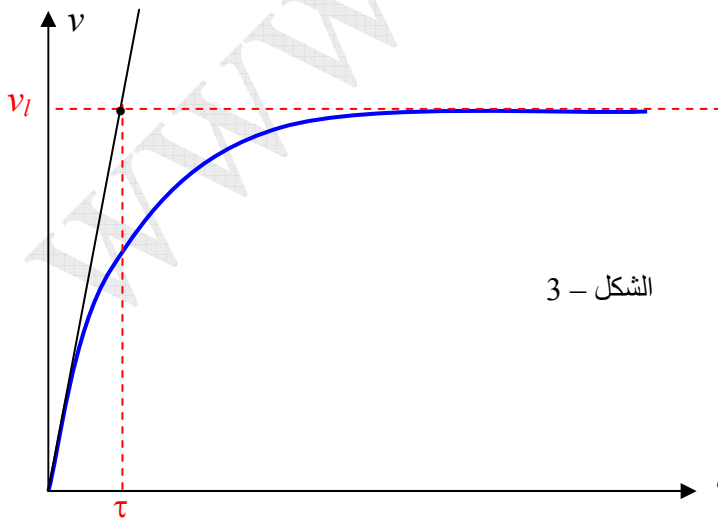
عند  $t_2 = t_1 + \Delta t$  ، أي من أجل  $n = 1$  لدينا  $v_2 = v_1 + [A - B v_1^2] \Delta t$

عند  $t_3 = t_2 + \Delta t$  ، أي من أجل  $n = 2$  لدينا  $v_3 = v_2 + [A - B v_2^2] \Delta t$  ...

وهكذا نتحصل على جدول يحتوي على قيم السرعة واللحظات الموافقة لها ، وبالتالي يمكن تمثيل  $v = f(t)$

وإذا أردنا حساب التسارع في اللحظة  $t_n$  نكتب  $a_n = \left( \frac{dv}{dt} \right)_{t_n} = A - B v_n^2$

**ملاحظة:** يمكن أن نستعمل طريقة أولر في حالة المعادلة التفاضلية من أجل  $f = k v$  باتباع نفس الخطوات .



**3 - تمثيل  $v = f(t)$  (الشكل - 3)**

سواء من أجل  $f = k v$  أو  $f = k' v^2$

نجد البيان الممثل في الشكل - 3 .

الشكل - 3

#### 4 - الثابت المميز للحركة ( $\tau$ ) ( ثابت الزمن )

**حالة  $f = kv$  :** لدينا المعادلة التفاضلية  $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right)$  ، ونعلم أنه عند  $t = 0$  تكون سرعة المتحرك معدومة ،

$$(3) \quad \frac{dv}{dt} = g \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right) \quad \text{وبالتالي}$$

ونعلم كذلك أن  $\frac{dv}{dt}$  هو تسارع المتحرك ، نرمز له بـ  $a_0$  ، أي التسارع عند  $t = 0$

**ملاحظة :** لا تتس أن التسارع ليس ثابتاً لأن الحركة ليست متغيرة بانتظام ، لأن مجموع القوى ليس ثابتاً لأن  $f$  تتغير أثناء الحركة في النظام الانتقالي .

$$a_0 = g \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right) \quad \text{نكتب العلاقة (3) على الشكل}$$

لاحظ في الشكل - 3 أن ميل المماس عند  $t = 0$  هو التسارع  $a_0$  ، لأنه هو مشتق السرعة بالنسبة للزمن عند  $t = 0$  ، وبالتالي

$$a_0 = \frac{v_l}{\tau} \quad (\text{ميل المماس هو المقابل على المجاور}) ، \text{ ومنه : } \tau = \frac{v_l}{a_0}$$

$$\tau = \frac{m}{k}$$

$$\tau = \frac{\frac{mg}{k} \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right)}{g \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right)} = \frac{m}{k} \quad \text{وبالتالي} \quad v_l = \frac{mg}{k} \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right) \quad \text{لدينا}$$

**حالة  $f = k'v^2$  :** لدينا المعادلة التفاضلية  $\frac{dv}{dt} + \frac{k'}{m} v^2 = g \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right)$  ، ونعلم أنه عند  $t = 0$  تكون سرعة المتحرك معدومة

$$\frac{dv}{dt} = g \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right) = a_0 \quad \text{وبالتالي} \quad ، \quad v_l = \sqrt{\frac{mg}{k'} \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right)} \quad \text{ولدينا} \quad ، \quad \tau = \frac{v_l}{a_0} \quad \text{سواء كانت } f = kv \text{ أو}$$

$$f = k'v^2$$

$$\tau = \sqrt{\frac{m}{k'a_0}}$$

$$\tau = \frac{\sqrt{\frac{m}{k'} a_0}}{a_0} = \sqrt{\frac{m \times a_0}{k' \times a_0^2}} = \sqrt{\frac{m}{k' a_0}} \quad \text{وبالتالي}$$

**الثابت المميز للحركة هو رتبة مقدار زمن النظام الانتقالي**

**التحليل البعدي لثابت الاحتكاك :**

$$[k] = \frac{kg}{s} = kg \cdot s^{-1} \quad : \quad k = \frac{m}{\tau}$$

$$[k'] = \frac{kg}{s^2 \times \frac{m}{s^2}} = kg \cdot m^{-1} : k' = \frac{m}{\tau^2 \times a_0}$$

ثابت الاحتكاك  $k$  : يتعلق بلزوجة المائع وشكل الجسم ، فبالنسبة لكرة نصف قطرها  $r$  :  $k = 6\pi\eta r$  ، حيث  $\eta$  هو معامل اللزوجة .

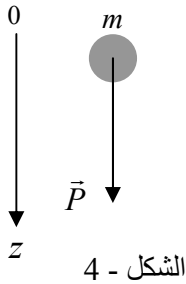
ثابت الاحتكاك  $k'$  : لا يتعلق بلزوجة المائع بل يتعلق فقط بشكل الجسم ، فبالنسبة لكرة نصف قطرها  $r$  :  $k' = 0,22 \pi \rho_f r^2$  ، حيث  $\rho_f$  هي الكتلة الحجمية للمائع .

**ملاحظة :** أنت لست مطالبا بحفظ هاتين العلاقتين ، تعطى لك في التمارين من أجل مقارنة ثابت الاحتكاك التجريبي مع النظري .

## 5 - السقوط الحر

نقول عن جسم أنه في سقوط حرّ إذا كان أثناء حركته لا يخضع إلا لقوة ثقله  $\vec{P}$  (الشكل - 4) .  
نطبق القانون الثاني لنيوتن على جسم في سقوط حرّ .

ولدينا  $\vec{P} = m \vec{g}$  ، ومنه :  $m \vec{a} = m \vec{g}$  ، وبالتالي تسارع السقوط الحر هو :



$$\vec{a} = \vec{g}$$

المعادلة التفاضلية لهذه الحركة هي  $\frac{dv}{dt} = g$

### 5 - 1 - معادلات السقوط الحر الشاقولي :

التسارع :  $a = g$  ، حيث  $g$  قيمة جبرية .

السرعة : بمكاملة التسارع بالنسبة للزمن نجد السرعة في اللحظة  $t$  :  $v = g t + b$

من أجل تحديد الثابت  $b$  نستعمل الشروط الابتدائية ، أي عند  $t = 0$  تكون  $v = v_0$  ،  $v_0$  هي السرعة الابتدائية ، أي السرعة في اللحظة  $t = 0$  ، وليس ضروريا أن تكون هي السرعة التي بدأ بها الجسم حركته

$$v = gt + v_0$$

الفاصلة : بمكاملة السرعة بالنسبة للزمن :  $z = \frac{1}{2} gt^2 + v_0 t + C$  ، ومن أجل تحديد الثابت  $C$  نستعمل الشروط الابتدائية

حيث عند  $t = 0$  يكون  $z = z_0$  (  $z_0$  هي الفاصلة الابتدائية ، وليس بالضرورة أن تكون هي الفاصلة التي انطلق منها المتحرك ) .

$$z = \frac{1}{2} gt^2 + v_0 t + z_0$$

### 5 - 2 - قوانين خاصة بالسقوط الحر

المسافة المقطوعة (الارتفاع) :  $h = \frac{1}{2} gt^2 + v_0 t$  حيث  $t$  هي المدة الزمنية لقطع المسافة  $h$  .

سرعة الجسم في لحظة ما : إذا كانت سرعة الجسم في لحظة ما هي  $v_A$  وكانت في لحظة بعدها  $v_B$  ، فإن :

$$v_B - v_A = g t$$

حيث  $t$  هي المدة المستغرقة بين A و B

العلاقة بين السرعة والمسافة : إذا كانت سرعة الجسم في لحظة ما هي  $v_A$  وكانت في لحظة بعدها  $v_B$  ، فإن

$$v_B^2 - v_A^2 = 2gh \quad \text{حيث } h \text{ هي المسافة } AB$$

## 6 - حركة قذيفة في مجال الجاذبية الأرضية

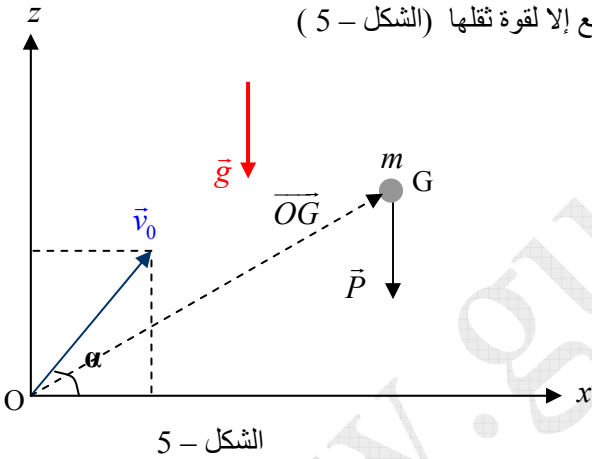
القذيفة هي جسم يُقذف من نقطة بسرعة ابتدائية يصنع شعاعها مع المستوي الأفقي التي قذفت منه زاوية  $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

**ملاحظة :** إذا كانت  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  يكون القذف شاقوليا (سبق لنا دراسة هذه الحالة) .

ندرس حركة القذيفة في المستوي  $(Oxz)$  أو  $(Oyz)$  ، أي في مستو شاقولي .  
ندرس مثالا مختصرا ، وننتظر لكل الحالات الأخرى في تمارين الكتاب المدرسي .  
نقذف في اللحظة  $t = 0$  جسما نعتبره نقطة مادية من مبدأ الإحداثيات بسرعة  $\vec{v}_0$  يصنع شعاعها مع المحور  $Ox$  الزاوية  $\alpha$  .

### 6 - 1 - دراسة حركة القذيفة

نطبق على حركة النقطة المادية القانون الثاني لنيوتن ، باعتبار أنها لا تخضع إلا لقوة ثقلها (الشكل - 5)



أي حركتها عبارة عن سقوط حر .

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}$$

، وبتعويض  $\vec{P} = m \vec{g}$  باختصار  $m$  من الطرفين :

$$\vec{a} = \vec{g}$$

مركبتا شعاع التسارع في المعلم هما  $\vec{a}(0, -g)$

مركبتا شعاع السرعة الابتدائية هما  $\vec{v}_0(v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha)$

مركبتا شعاع الانتقال هما  $\vec{OG}(x, z)$  .

بما أن التسارع على المحور  $Ox$  معدوم ، إذن الحركة على هذا المحور منتظمة ، وسرعتها  $v_x = v_0 \cos \alpha$  ، وبالتالي :

$$(4) \quad x = v_0 \cos \alpha t$$

بما أن التسارع على المحور  $Oz$  ثابت  $(-g)$  ، إذن الحركة على هذا المحور متغيرة بانتظام ، وسرعتها الابتدائية  $v_{0,z} = v_0 \sin \alpha$

$$(5) \quad z = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \alpha t \quad \text{وبالتالي :}$$

وباشتقاق عبارة  $z$  بالنسبة للزمن نجد :  $v_z = -g t + v_0 \sin \alpha$

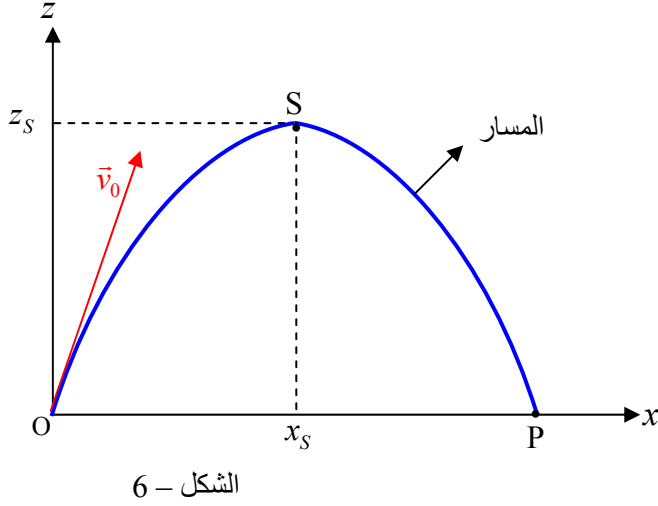
### 6 - 2 - معادلة المسار

من العلاقة (4) نستخرج  $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$  ، ثم نعوض عبارة الزمن في العلاقة (5) ونجد معادلة المسار :



$$z = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \operatorname{tg} \alpha \quad \text{ومنه : } z = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + v_0 \sin \alpha \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

معادلة المسار من الشكل  $z = a x^2 + b x$  ، فهي معادلة قطع مكافئ .



### 6 - 3 - النقاط الخاصة في المسار

الذروة (S) : هي أعلى نقطة تصلها القذيفة (الشكل - 6) .

من خصائص هذه النقطة أن السرعة على المحور Oz تنعدم ، أي

$$(6) \quad -g t + v_0 \sin \alpha = 0$$

**ملاحظة :** السرعة على المحور Ox لا تنعدم في S لأن السرعة على هذا المحور ثابتة .

نستخرج الزمن من العلاقة (6) ونعوضه في العلاقة (5)

$$z_S = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad \text{نجد ترتيب الذروة :}$$

المدى : هي أكبر مسافة تقطعها القذيفة على المحور الأفقي Ox ، أي هي المسافة OP .

$$x_P = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad \text{لإيجاد المسافة OP } (x_P) \text{ نضع } z = 0 \text{ في معادلة المسار ونجد :}$$

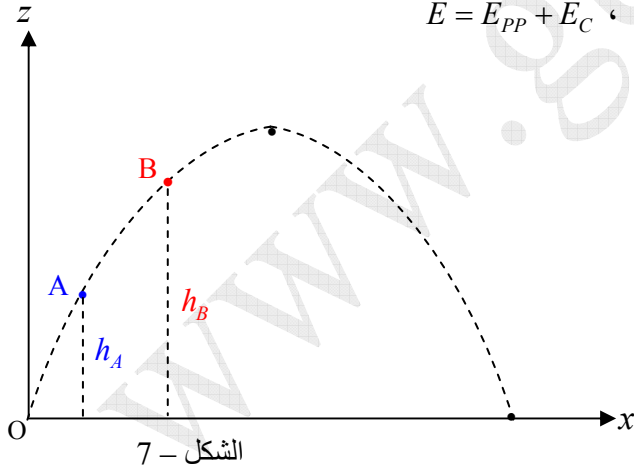
### 7 - تحديد سرعة القذيفة في اللحظة t بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة

نهمل تأثير الهواء على الجسم (الإحتكاك ودافعة أرخميدس) تكون الجملة شبه معزولة ، أي أن طاقتها الميكانيكية تكون محفوظة .

نعتبر الوضع المرجعي المستوي الأفقي الذي يشمل النقطة O (الشكل - 7) .

الطاقة الميكانيكية E هي مجموع الطاقتين الكامنة الثقالية والحركية للجسم ،  $E = E_{pp} + E_C$  ،

$E_B = E_A$  لأن الطاقة الميكانيكية ثابتة .



$$mgh_A + \frac{1}{2}mv_A^2 = mgh_B + \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$v_B^2 = v_A^2 + 2g(h_A - h_B)$$

### 8 - تمثيل الطاقة الحركية والكامنة بدلالة الزمن

#### 8 - 1 - الطاقة الكامنة

لدينا  $E_{pp} = mgz = mg\left(-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t\right)$  ، باعتبار الوضع المرجعي هو المحور Ox (z يتغير مع الزمن)

$$E_{pp} = -\frac{1}{2}mg^2 t^2 + mg v_0 \sin \alpha t$$

نلاحظ أن العلاقة  $E_{pp} = f(t)$  عبارة عن قطع مكافئ يمر بالمبدأ وهي من الشكل  $E_{pp} = at^2 + bt$  ، حيث  $a < 0$

## 8 - 2 - الطاقة الحركية

$$(7) \quad E_C = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{لدينا}$$

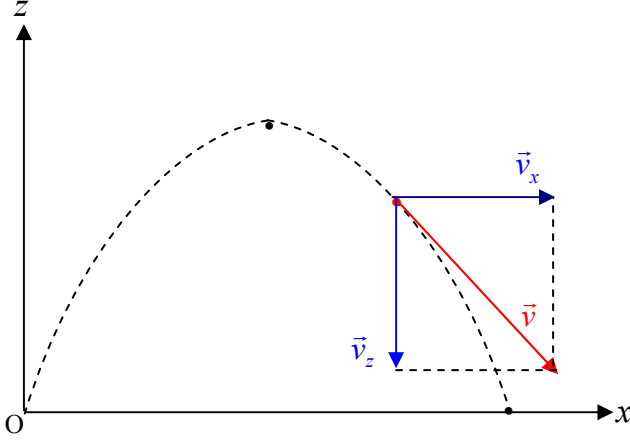
حيث أن في كل لحظة يكون  $v^2 = v_x^2 + v_z^2$  (الشكل - 8)

$$\text{ولدينا} \quad v_x = v_0 \cos \alpha \quad \text{و} \quad v_z = -gt + v_0 \sin \alpha$$

بالتعويض في العلاقة (7) :

$$E_C = \frac{1}{2} m \left[ v_0^2 \cos^2 \alpha + (-gt + v_0 \sin \alpha)^2 \right]$$

$$E_C = \frac{1}{2} m g^2 t^2 - m g t v_0 \sin \alpha + \frac{1}{2} m v_0^2$$



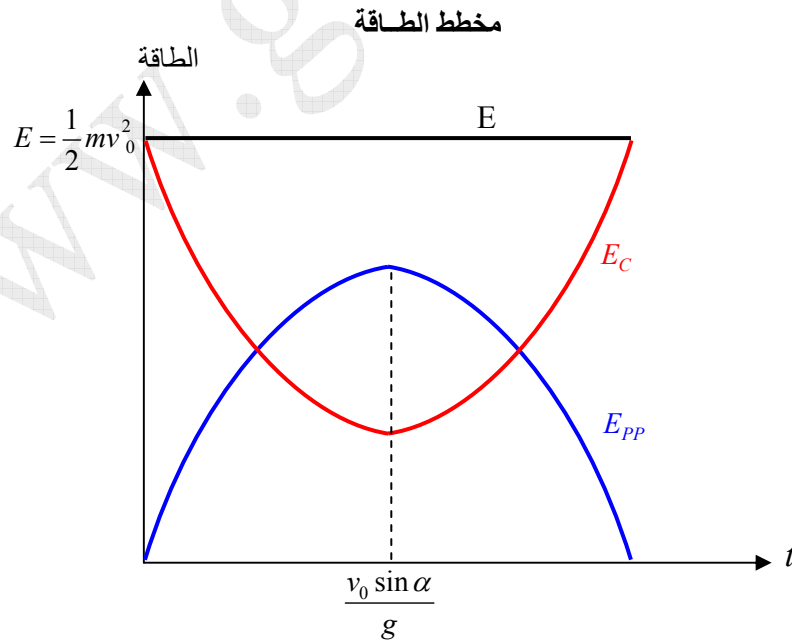
الشكل - 8

نلاحظ أن العلاقة  $E_C = f(t)$  عبارة عن قطع مكافئ معادلته من الشكل  $E_C = at^2 + bt + c$  ، حيث  $a > 0$

## 8 - 3 - الطاقة الميكانيكية (الشكل - 9)

$$E = E_{pp} + E_C \quad , \quad \text{وبالتعويض :} \quad E = -\frac{1}{2} m g^2 t^2 + m g v_0 \sin \alpha t + \frac{1}{2} m g^2 t^2 - m g t v_0 \sin \alpha + \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2$$



الشكل - 9